Translation of *Covering the Plane with Repeated Patterns -Part I : Haneet Gandhi*_**From Azim premji University At Right Angles_March, 2014**

किसी तल को दोहराते पैटर्न से ढँकना : भाग 1

हनीत गाँधी

"माँ, देखो वहाँ। कितना ख़ूबसूरत है!"

"हाँ बेटे, सचमुच, बहुत सुन्दर है। यह हिन्दुस्तानी वास्तुकला का नमूना है। इसमें पच्चीकारी (टेसेलेशन, टेसेलीकरण) है, और कई सारे सममित पैटर्न हैं।"

वास्तुकला अपने समय और स्थान की कहानी कहती है, मगर कालजयी होना चाहती है। इस लेख के ज़रिए मैं आपको एक ऐसे विषय के बारे में बताऊँगी जो गणित को कला और तहज़ीब से जोड़ता है। यह लेख दो भागों में है।

हाल ही में, मैं अपनी बेटी के साथ दिल्ली के कुछ ऐतिहासिक स्थल घूमकर आई। इस सफ़र में हमने अतीत की सिविल इंजीनियरिंग के चमत्कारों को सराहा। हम यह देखकर ताज्जुब में पड़ गए कि कितनी ख़ूबसूरती और जटिलता से हमारे पूर्वजों ने कला और ज्यामिति का सम्मिश्रण किया था।

कई खड़ंजों, दीवारों और छतों पर बने जटिल पैटर्न देखकर हम सचमुच स्तब्ध रह गए। हमने ध्यान दिया कि आकृतियों के एक समूह को इस तरह जोड़ा गया था कि वे पूरे तल को ढँक रही थीं। दिलचस्प बात यह दिखी कि आकृति(यों) का एक-एक ब्लॉक इस तरह एक-दूसरे में फ़िट था कि बीच में कोई ख़ाली जगह नहीं थी। हमने इस तरह के पैटर्न दिल्ली के लगभग सारे ऐतिहासिक स्थलों पर देखे। कुछ तस्वीरें यहाँ पेश हैं।

मैं इस लेख में सटीकता से फ़िट होने वाले इन पैटर्नों का गणितीय आधार स्पष्ट करना चाहती हूँ। हम देखेंगे कि कैसे किसी जटिल पैटर्न को सरल हिस्सों में तोड़ा जा सकता है। मिडिल स्कूल विद्यार्थियों को गणित विषय को कला और तहज़ीब के साथ जोड़ने हेतु प्रोत्साहित करने के लिए यह गतिविधि की जा सकती है। शुरू करने से पहले इन ख़ूबसूरत तस्वीरों पर एक नज़र डाल लीजिए।

मुख्य शब्द : *पैटर्न, पच्चीकारी (टेसेलेशन), चतुर्भुज, त्रिभुज, वास्तुकला, पतली ईंट/टाइल, मुग़ल, ऐशर*



कुतुब मीनार में जाली



विश्वविद्यालय मेट्रो स्टेशन, दिल्ली



लाल क़िले की छत



कुतुब मीनार में जाली



दिल्ली विश्वविद्यालय कुलपति कार्यालय में जाली



कुतुब मीनार में दीवार



चाँदनी चौक का एक मकान



बंगलासाहब गुरुद्वारे का कालीन



जामा मस्जिद







लाल क़िले में कुछ जालियाँ



चाँदनी चौक का एक मकान



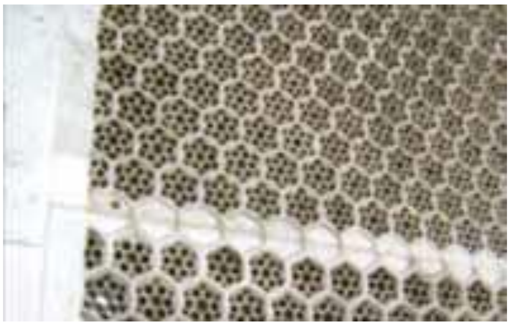
पुरानी दिल्ली की एक झलक



कुतुब मीनार में दीवार



लाल क़िले में दीवार



आगरा के ताजमहल में जाली की दीवार



जहाँगीर महल, आगरा क़िला

इन सारी तस्वीरों में, आप देखेंगे कि एक आकृति या आकृतियों का समूह एक समतल सतह पर इस तरीक़े से दोहराया जा रहा है कि कहीं ख़ाली जगह नहीं बच रही है और न ही आकृतियाँ एक के ऊपर एक चढ़ी हैं। यह पैटर्न उस तल की चारों दिशाओं में बढ़ सकता है। ऐसी डिज़ाइन को ***टाइलिंग*** या ***टेसेलेशन*** *(फ़र्शियाँ बिछाना या पच्चीकारी)* कहते हैं। (यूनानी भाषा में 'टेसेल' या 'टेसेरा' का मतलब है 'टाइल')। टेसेलेशन दो चीज़ों पर आधारित है : (1) सर्वांगसम आकृतियों का एक अनन्त समूह, (2) आकृतियाँ किसी द्वि-आयामी (सपाट) सतह को पूरी तरह से भर दें यानी न ख़ाली जगह छोड़ें, न एक के ऊपर एक चढ़ी (अतिव्याप्त) हों।

पच्चीकारी का अध्ययन गणित, कला, स्थापत्य, संस्कृति और इतिहास जैसे विभिन्न क्षेत्रों में फैला है। पच्चीकारी सिर्फ़ इन्सान की बनाई गई इमारतों में नहीं, क़ुदरत में भी दिखती है। मधुमक्खी का छत्ता, साँप की चमड़ी और कछुए का कवच क़ुदरती पच्चीकारी के कुछ उदाहरण हैं। आज पच्चीकारी विभिन्न क्षेत्रों में प्रासंगिक है, जैसे एक्स-रे क्रिस्टलोग्राफ़ी, क्वांटम

मेकेनिक्स, क्रिप्टोलॉजी। धातु की चादर को कम-से-कम बर्बादी करके कैसे काटा जाए, इसमें भी पच्चीकारी काम आती है।

पच्चीकारी का गणितीय अध्ययन सबसे पहले योहानेस केपलर (Johannes Kepler) ने 1619 में किया था। शायद, टेसेलेशन का अध्ययन हिमकणों के उनके अध्ययनों से उभरा था। दो शताब्दियों बाद 1891 में रूसी क्रिस्टलोग्राफ़र ई.एस.फ़ेदोरोव (E.S. Fedorov) ने पच्चीकारी को आइसोमेट्री के क्षेत्र से जोड़ा। मौरिट्स कॉर्नेलियस ऐशर (1898-1972) दोहराते पैटर्नों का विस्तार में अध्ययन करने वाले शुरुआती लोगों में थे। उन्होंने कई उत्कृष्ट कृतियों का निर्माण किया।

नियमित और अर्ध-नियमित पच्चीकारियों की गिनती

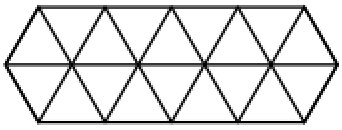
पेचीदा पच्चीकारी का अध्ययन करने से पहले हमें बुनियादी आकृतियों की पच्चीकारियों को देखना चाहिए। इन्हें **नियमित पच्चीकारी (रेग्युलर टेसेलेशन)** भी कहा जाता है। विषयवस्तु को भली-भाँति समझने के लिए आपको ख़ुद इन आकृतियों के साथ प्रयोग करके देखना होगा। इसके लिए 3, 4, 5, 6, 7, 10 और 12 भुजाओं वाले समबहुभुज की कम-से-कम 10-10 प्रतियाँ अपने साथ रखनी होंगी। सभी बहुभुजों की भुजाओं की लम्बाई समान होनी चाहिए।

सबसे छोटे समबहुभुज से शुरुआत कीजिए : समबाहु त्रिभुज। क्या एक ऐसी डिज़ाइन बनाई जा सकती है जिसमें न आकृतियों के बीच ख़ाली जगह हो, न ही कोई त्रिभुज किसी दूसरे के ऊपर चढ़ा हो? आप देखेंगे कि वे एक-दूसरे के साथ फ़िट हो जाते हैं (**चित्र-2 क**)। और वर्ग (**चित्र-2 ख**) के साथ भी यह मुमकिन है। मगर समपंचभुज ठीक से फ़िट नहीं होते, डिज़ाइन में ख़ाली जगहें छूट जाती हैं (**चित्र-3 क**)। समषट्कोण आपस में अच्छे-से बैठ जाते हैं। और-तो-और, इनकी डिज़ाइन तल पर लगातार अनन्त तक फैलती जा सकती है (**चित्र-2 ग**)। सात भुजाओं के बहुभुज (सप्तभुज) एक-दूसरे पर चढ़ जाते हैं, इनका पच्चीकरण नहीं हो पाता (**चित्र-3 ख**)। अब परखकर देखिए : क्या 9, 10 और 12 भुजाओं के समबहुभुजों का पच्चीकरण होता है?

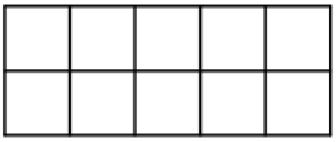
ऐसा क्यों है कि पच्चीकरण सिर्फ़ तीन समबहुभुजों के साथ मुमकिन है? कोई ख़ाली जगह न रहे और समभुज अतिव्याप्त भी न हों, इसके लिए ज़रूरी है कि समबहुभुज आपस में ऐसे सटे हुए होने चाहिए कि हर शीर्ष के आस-पास 360° कोण हो। सिर्फ़ समबाहुत्रिभुज, वर्ग और समषट्कोण के साथ ही यह मुमकिन है क्योंकि उनके आन्तरिक कोण (क्रमश: 60°, 90° और 120°) 360° के भाजक हैं। अन्य समबहुभुजों के आन्तरिक कोण 360° के भाजक नहीं हैं, इसलिए पच्चीकरण नहीं हो पाता। उदाहरण के लिए समपंचभुज को लेते हैं। इस बहुभुज का आन्तरिक कोण है 108°। जब हम तीन पंचभुज को साथ बैठाते हैं तो हमें ख़ाली जगह नज़र आती है। वह इसलिए क्योंकि तीन पंचभुज के आन्तरिक कोण मिलकर सिर्फ़ 324° बनते हैं, इस वजह से 360°-324°=36° की ख़ाली जगह दिखाई देती है। जिन समबहुभुजों की 6 से

ज़्यादा भुजाएँ हैं वे एक-दूसरे पर अतिव्याप्त हो जाते हैं क्योंकि उनके आन्तरिक कोण मिलकर 360° से ज़्यादा बनते हैं। इसलिए पच्चीकरण नहीं हो पाता।

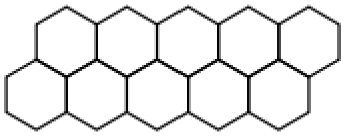
अगला सवाल है कि क्या हम बहुभुजों के कुछ ऐसे *मिले-जुले समूह* ढूँढ़ सकते हैं जिनका पच्चीकरण मुमकिन हो? क्या वर्ग और समबाहु त्रिभुज को मिलाकर पच्चीकरण होगा? सम पंचभुज और समषट्कोण के मिश्रण में हो पाएगा पच्चीकरण? क्या आप अन्दाज़ लगा सकते हैं कि समबहुभुज के कौन-से मिश्रित समूहों में पच्चीकरण मुमकिन होगा, कौन-से में नहीं? तालिका 1 में समबहुभुजों के आन्तरिक कोण दिए गए हैं।



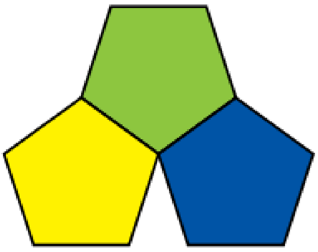
चित्र-2 क



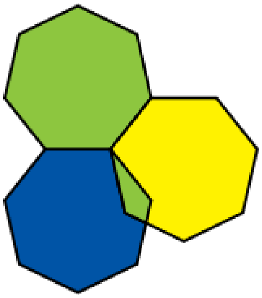
चित्र-2 ख



चित्र-2 ग



चित्र-3 क



चित्र-3 ख

भुजाएँ	3	4	5	6	8	9	10	12	18	20	n
कोण	60°	90°	108°	120°	135°	140°	144°	150°	160°	162°	$180°(n-2)/n$

तालिका 1 : विभिन्न समबहुभुजों के आन्तरिक कोण

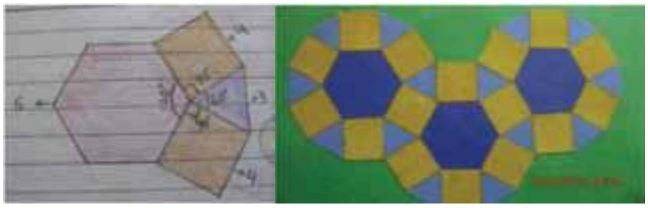
क्रमांक	1	2	3	4	5
सम्मिश्रण	(3.3.3.3.3.3)	(3.3.3.4.4)	(3.3.3.3.6)	(4.4.4.4)	(3.4.4.6)

क्रमांक	6	7	8	9	10	11
सम्मिश्रण	(3.3.6.6)	(3.3.4.12)	(6.6.6)	(5.5.10)	(4.8.8)	(4.6.12)

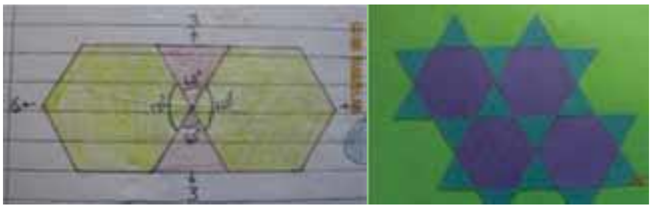
क्रमांक	12	13	14	15	16	17
सम्मिश्रण	(4.5.20)	(3.12.12)	(3.10.15)	(3.9.18)	(3.8.24)	(3.7.42)

तालिका 2 : समबहुभुजों के वे सम्मिश्रण जिनके शीर्ष कोणों का योग 360° होगा।

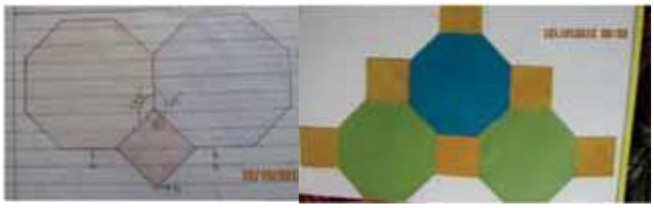
मात्र कोणों को जोड़कर हम यह बता सकते हैं कि समबहुभुज के कौन-से समूह में *पच्चीकरण* मुमकिन होगा। जैसे कि तीन समबाहु त्रिभुज और दो वर्गों में पच्चीकरण मुमकिन है क्योंकि उनके आन्तरिक कोणों का योग 360° है। इसी हिसाब से एक समबाहु त्रिभुज, एक समदशभुज और एक समपंचदशबहुभुज (15 भुजाएँ) में पच्चीकरण होगा। दो समपंचभुज और एक सम दशभुज में भी होगा। जाँच-पड़ताल के बाद ऐसे 17 समबहुभुज के समूह तैयार होते हैं जिन्हें इस पैटर्न में सटाकर रखा जा सकता है कि शीर्ष पर उनके आन्तरिक कोण का योग 360° हो। ऐसे समूह **तालिका 2** में बताए गए हैं।



(3.4.6.4) सम्मिश्रण और उसका पच्चीकरण



(3.6.3.6) सम्मिश्रण और उसका पच्चीकरण



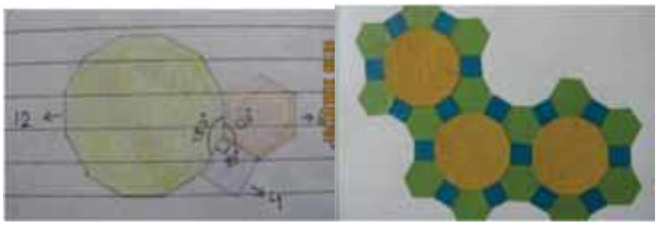
(4.8.8) सम्मिश्रण और उसका पच्चीकरण

तालिका 2 में संकेत निम्नानुसार हैं। उदाहरण के लिए संयोजन (3.7.42) को देखिए। (3.7.42) का मतलब है कि पच्चीकरण में हर शीर्ष पर एक समबाहु त्रिभुज, एक 7 भुजाओं वाला समबहुभुज और एक 42 भुजाओं वाला बहुभुज जुड़ेगा। इसी तरह, (3.4.4.6) संयोजन का मतलब है कि पच्चीकरण में हर शीर्ष पर एक समबाहुत्रिभुज, दो वर्ग और एक समषट्कोण जुड़ते हैं।

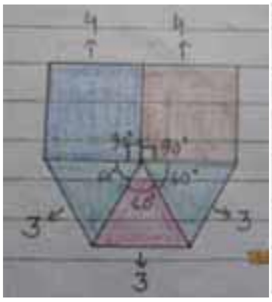
मगर गणित की मदद से सम्भावनाओं की फ़ेहरिस्त बनाना पूरी कहानी नहीं है। उदाहरण के लिए (3.3.3.4.4) का समूह लेते हैं। हमने इस संयोजन को सम्भावितों की सूची में रखा है क्योंकि इन आकृतियों के आन्तरिक कोणों का योग 360° है (60° + 60° + 60° + 90° + 90°)। मगर इसका मतलब यह नहीं है कि पच्चीकरण असल में हो पाएगा। यह तो आपको *प्रयोग* करके पक्का करना होगा।

जब आप प्रयोग करेंगे तो हैरानी के लिए तैयार रहिए। आप देखेंगे कि कई संयोजनों के आन्तरिक कोणों का योग तो 360° है मगर किसी विशिष्ट मामले में अलग-अलग पैटर्न सामने आते हैं। तीन समबाहु त्रिभुज और दो वर्गों के समूह के आन्तरिक कोणों का योग 360° है (3 × 60° + 2 × 90° = 360°)। लेकिन यह संयोजन दो सम्भावित डिज़ाइन देता है (**चित्र-4 क** और **चित्र-4 ख**)।

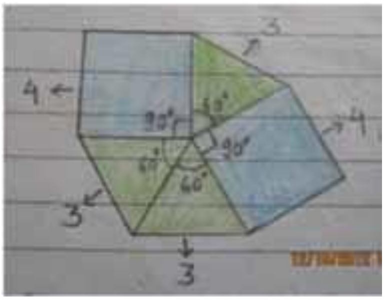
क्या दोनों में वैध पच्चीकरण मिलता है? और क्या दोनों पच्चीकरण में सारे शीर्ष पर समान व्यवस्था बनती हैं? (ऐसे पच्चीकरण को ***अर्ध-नियमित पच्चीकरण*** कहा जाता है।) जी हाँ, बनती हैं!



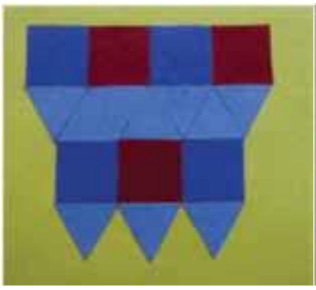
(4.6.12) और उसका पच्चीकरण



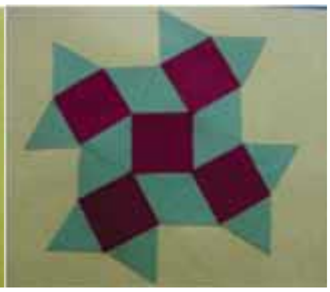
चित्र-4 क (3.3.3.4.4)



चित्र-4 ख (3.4.3.3.4)



(3.3.3.4.4)



(3.4.3.3.4)

कुछ समूह में उल्टा होता है! 3, 10 और 15 का समूह लेते हैं। गणित के हिसाब से तो पच्चीकरण सम्भव है। मगर प्रयोग करने पर पता चलता है कि पच्चीकरण असल में मुमकिन नहीं है।

(इस लेख के अगले भाग (*Covering the Planes with Repeated Patterns - Part II किसी तल को दोहराते पैटर्न से ढँकना - 2 : Haneet Gandhi At Right Angles_July, 2014)* में हम देखेंगे कैसे नियमित पच्चीकरण में तब्दीली लाकर आकर्षक कलाकृतियाँ बनाई जा सकती हैं।

अधिक जानने के लिए

i. http://library.thinkquest.org/16661/index2.html#anchor-top

ii. http://euler.slu.edu/escher/index.php/Tessellations_by_Recognizable_Figures

iii. http://www.mcescher.com (मौरिट्स ऐशर की जीवनी और कला)

iv. http://www.mcescher.com/Gallery/gallery-symmetry.htm (मौरिट्स ऐशर के टेसेलेशन के कुछ ऐसे उदाहरण जिन पर क्लास में बातचीत हो सकती है)

कुछ तस्वीरों के स्रोत

http://www.mcescher.com/Gallery/gallery-symmetry.htm

लेखक आभारी हैं : टेसेलेशन की तस्वीरें मैंने और मेरे बीएड के विद्यार्थियों (2012-13) ने ली हैं। जटिल पच्चीकारी बनाने के प्रयास के लिए मैं उन्हें धन्यवाद देना चाहती हूँ। इस लेख में उन्होंने मुझे अपने डिज़ाइन इस्तेमाल करने की इजाज़त दी, इसके लिए मैं उनका शुक्रिया अदा करती हूँ।

डॉ. हनीत गाँधी दिल्ली विश्वविद्यालय के शिक्षा विभाग में सहायक प्राध्यापक हैं। वे गणित शिक्षा और शिक्षा शोध में मात्रात्मक तकनीक जैसे विषय पढ़ाती हैं। उन्होंने आईआईटी दिल्ली से गणित में स्नातकोत्तर और लखनऊ विश्वविद्यालय से गणित शिक्षा में पीएचडी की है। उन्हें गणित के अध्यापन और सवाल सुलझाने सम्बन्धी शोध में रुचि है।

अनुवाद : भाविनी पन्त **पुनरीक्षण** : सुशील जोशी **कॉपी एडिटर** : अभिषेक दुबे (सभी द्वारा एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन** : राजेश उत्साही